

Vài nét về SUDOKU

Tô Đông

Lời nói đầu

Trong mấy năm gần đây, một trò chơi về ô số gọi là *Sudoku* đã được phổ biến mọi nơi. Người ta cho rằng đó là một puzzle đặc sắc của thế kỷ 21, vì thích hợp với mọi lứa tuổi, từ các trẻ em đến các vị bô lão. Đủ loại trò giải trí liên hệ được bày bán trong các tiệm đồ chơi. Nhiều loại ô số cũng được đăng tải trên các báo hàng ngày, kể cả tuần san, nguyệt san. Nếu đến một hiệu sách, như Barnes & Noble tại Mỹ, chúng ta thấy có cả một khu đầy sách nói về *Sudoku*. Trên lý thuyết, có nhiều loại *Sudoku* để mà lựa chọn, nên những sách này đều mô tả luật sắp xếp các con số và cách giải đáp. Thường là sách về *Sudoku* 9x9 dùng 9 con số đặt trong 81 ô vuông, có kèm theo từ mấy trăm đến cả ngàn bài toán đố về ô số và lời giải. Thí dụ **1001 Sudoku**, một sưu tập của Thunder's Mouth Press, in bởi Avalon Publishing Group, New York, NY10011. Tuy nhiên, sách này in không lấy gì làm đẹp, bảng mục lục kém rõ ràng mà sách lại không có đánh số trang.

Muốn có đầy đủ chi tiết về trò chơi này, chúng ta chỉ cần tra cứu *Loại Bách Khoa Tự Điển tự cập nhật hóa Wikipédia*. Hơn nữa, trên mạng lưới toàn cầu, đề tài còn có rất nhiều Trung Tâm cho độc giả tham dự.

Bài này tóm lược vài nét chính của *Sudoku*, thêm phần bàn luận thật sơ sài liên hệ đến Ma Phương, Tập Hợp, Tân Toán Học. Những cách tính dùng thảo chương, hoặc các phương trình của Lotus 123, Excel đều không được đề cập đến, để giữ tính cách phổ thông/giải trí của loại trò chơi này.

Sudoku

Sudoku là từ ngữ của Nhật Bản (*Su* là con số, và *doku* là độc đáo), để chỉ một trò chơi ô số hiện hữu từ 1979. *Sudoku* dựa vào ý niệm hình vuông Latin. Người ta cũng cho rằng bài toán không lời giải của nhà toán học Thụy Sĩ Leonhard Euler vào năm 1782 khi sắp xếp 36 sĩ quan thuộc mọi binh chủng trong một mạng hình vuông 6x6 Gréco-Latin bậc 6, có thể đã là một tác nhân sinh ra *Sudoku*.

Luật chơi ô số Sudoku

1. SUDOKU 4x4

Giản dị nhất là *Sudoku* 4x4, dùng 4 con số, từ 1 đến 4, đặt trong 16 ô của một hình vuông. Hình 1 là *Sudoku* 4x4, chia làm 4 khu vuông nhỏ. Mỗi khu vuông này có 4 ô, được tô màu khác nhau cho dễ nhận.

<u>1</u>			
?		<u>1</u>	
<u>2</u>	??		<u>3</u>
<u>4</u>			

Hình 1 (Toán đồ)

Trò đồ cho biết vị trí của các ô có một số con số cho sẵn, thí dụ 5 trong tổng số 16 con số (thí dụ 1, 1, 2, 3, và 4 trong Hình 1, được tô đậm và có gạch dưới). Người ta phải điền vào các ô trống khác sao cho ra một *Sudoku*, mà đặc tính mô tả như sau:

1. Mỗi ô chứa một con số, hoặc 1, 2, 3, hay 4.
2. Bốn khu vuông nhỏ chứa 4 con số 1, 2, 3, hay 4.
3. Bốn hàng ngang hay cột dọc chứa 4 con số 1, 2, 3, hay 4.

Lời giải sẽ do tìm kiếm các số và thử nghiệm lại sao cho 3 điều kiện trên được thỏa mãn:

Xét cột dọc thứ nhất ta thấy thiếu số 3, vậy ô có dấu ? sẽ mang số 3.

Xét hình vuông nhỏ màu xám, ta thấy thiếu số 1 và 3, nhưng trên hàng ngang thứ ba đã có số 3 rồi, vậy ô có dấu ?? phải là số 1, và ô còn lại là số 3.

Dần dần ta điền vào những ô trống cho kín hết, cố nhiên mỗi con số chỉ được xuất hiện có một lần trong khu vuông nhỏ, hàng ngang hay cột dọc, để được một *Sudoku* như sau:

<u>1</u>	2	3	4
3	4	<u>1</u>	2
<u>2</u>	1	4	<u>3</u>
<u>4</u>	3	2	1

Hình 1b (Bài giải)

Thật ra ta có thể liên hệ *Sudoku* này với một hình vuông Latin sau, a, b, c, d là 4 thông số với bất cứ giá trị/trị số nào, như trong Hình 2:

a	b	c	d
c	d	a	b
b	a	d	c
d	c	b	a

Hình 2

Ta còn có thể liên hệ với Ma Phương nếu thêm trong điều kiện 3: Bốn hàng ngang hay cột dọc, và hai đường chéo chính phải chứa 4 con số 1, 2, 3, hay 4. Xin xem Hình 3 sau đây:

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Hình 3: *Sudoku* có tính Ma Phương

Hình 4 là *Sudoku* có tính Ma Phương, liên hệ với hình vuông Latin và viết dưới dạng những thông số:

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

Hình 4: *Sudoku*, Hình Vuông Latin và Ma Phương

2. SUDOKU 9x9

Ta có thể có nhiều loại toán đố tùy theo *Sudoku* có ít hay nhiều ô, giống như trường hợp Ma Phương. Nếu *Sudoku* 4x4 quá giản dị hay quá dễ ($2^4=4 \times 4$, nghĩa là có 16 ô với 4 con số và 4 khu vuông), thì loại quá lớn và phức tạp sẽ mất đi tính cách giải trí, như *Sudoku* 16x16 ($4^4=16 \times 16$, dùng 256 ô với 16 con số và 16 khu vuông).

Chính vì vậy, *Sudoku* 9x9 ($3^4=9 \times 9$, hay là 81 ô với 9 con số và 9 khu vuông) sẽ thích hợp nhất để ta chỉ phải bỏ một ít thì giờ và công sức ra để suy tính lời giải. Tuy nhiên, nguyên tắc vẫn là một. Trò đố cho biết vị trí của các ô chứa một số con số cho sẵn trong tổng số 81 ô số. Người ta phải điền vào các ô trống khác sao cho ra một *Sudoku*, mà đặc tính được mô tả như sau:

1. Mỗi ô chứa một con số, có thể là 1, hay 2, 3... cho đến 9.
2. Chín khu vuông nhỏ chứa 9 con số, từ 1, 2, 3 cho đến 9.
3. Chín hàng ngang hay cột dọc đều chứa 9 con số, từ 1, 2, 3 cho đến 9.

Lời giải sẽ do sự tìm kiếm các con số đặt/viết vào ô trống, và thử nghiệm lại sao cho các điều kiện trên được thỏa mãn. Nếu các ô số đã cho sẵn càng nhiều thì càng dễ kiếm *Sudoku*, nhưng nếu quá ít và lại đặt vào các ô đặc biệt thì rất khó tìm lời giải. Ta có thể tạm chia các loại khó dễ tùy số các ô số đã cho sẵn trong tổng số 81 ô số:

Loại rất dễ trên 37 ô số cho sẵn, loại dễ khoảng 31-36 ô số, loại khó vừa khoảng 29-31 ô số, loại khó khoảng 25-29 ô số, và loại rất khó khoảng 23-25 ô số cho sẵn. Thí dụ được mô tả trong các Hình 5, 6, 7, 8.

5							2	
6		2			4		1	3
	7					9		
8	2				5		7	
		3		2				
9	4	5	7				8	
2		8		3	7		5	
			4		9	2		8
4		9	2		8	1		7

Hình 5 (Loại dễ, 35 ô số cho trước)

5	8	4	3	9	1	7	2	6
6	9	2	5	7	4	8	1	3
3	7	1	6	8	2	9	4	5
8	2	6	9	4	5	3	7	1
7	1	3	8	2	6	5	9	4
9	4	5	7	1	3	6	8	2
2	6	8	1	3	7	4	5	9
1	5	7	4	6	9	2	3	8
4	3	9	2	5	8	1	6	7

Hình 5b (Bài giải, 43-47)

Ta còn có thể liên hệ *Sudoku* với Ma Phương nếu như thêm trong điều kiện 3: Chín hàng ngang hay cột dọc, và hai đường chéo chính phải chứa đủ 9 con số từ 1, 2, 3.. đến 9. Bài giải trong Hình 5 sẽ trở thành như sau:

5	9	4	3	7	1	8	2	6
6	8	2	5	9	4	7	1	3
3	7	1	6	8	2	9	4	5
8	2	6	9	4	5	3	7	1
7	1	3	8	2	6	5	9	4
9	4	5	7	1	3	6	8	2
2	6	8	1	3	7	4	5	9
1	3	7	4	5	9	2	6	8
4	5	9	2	6	8	1	3	7

Hình 5c (Bài giải có tính Ma Phương, 45-45)

Trong trường hợp này của *Sudoku hoàn toàn*, tổng cộng 9 con số từ 1, 2, 3.. đến 9 trong chín khu vuông, chín hàng ngang, chín cột dọc, và hai đường chéo chính sẽ cùng bằng 45.

Tổng cộng của 9 con số cũng là cách kiểm chứng xem lời giải của *Sudoku* có đúng không. Nếu chín khu vuông, chín hàng ngang, chín cột dọc, có tổng số đều bằng 45, thì đúng là *Sudoku*. Ta có thể nhận biết/phân biệt một *Sudoku* qua trị số của hai đường chéo chính. Với *Sudoku* trong Hình 5b, là 43-47, trong khi *Sudoku hoàn toàn* của Hình 5c, cũng như của các Hình 6c, 7c, 8c là 45-45.

4			2		8	3		1
								2
2		8	1	3				
				5	4	2		8
9								
6		4	9		2			7
				2	9		4	
8				4				3
	4		7	1				

Hình 6 (Loại khó vừa, 29 ô số cho trước)

4	6	5	2	9	8	3	7	1
1	3	7	4	6	5	9	8	2
2	9	8	1	3	7	6	5	4
3	7	1	6	5	4	2	9	8
9	8	2	3	7	1	4	6	5
6	5	4	9	8	2	1	3	7
7	1	3	8	2	9	5	4	6
8	2	9	5	4	6	7	1	3
5	4	6	7	1	3	8	2	9

Hình 6c (Bài giải, 45-45)

				6		9		
	9	2	8	5				
	6			9				8
9					8		6	
	1					8	5	
		8	6					
		9						
				8		2	7	9
4			2				3	

Hình 7 (Loại khó, 25 ô số cho trước)

8	5	4	3	6	1	9	2	7
7	9	2	8	5	4	6	1	3
3	6	1	7	9	2	5	4	8
9	2	7	5	4	8	3	6	1
6	1	3	9	2	7	8	5	4
5	4	8	6	1	3	7	9	2
2	7	9	1	3	6	4	8	5
1	3	6	4	8	5	2	7	9
4	8	5	2	7	9	1	3	6

Hình 7c (Bài giải, 45-45)

2		8				7		4
			2		8			
		3				5		
				8				
	3			1			5	
	8		9	3	6		7	
			3		9			
3								7
	2						6	

Hình 8 (Loại rất khó, 23 ô số cho trước)

2	1	8	5	6	3	7	9	4
4	5	9	2	7	8	1	3	6
6	7	3	1	9	4	5	2	8
1	9	2	7	8	5	6	4	3
7	3	6	4	1	2	8	5	9
5	8	4	9	3	6	2	7	1
8	6	7	3	5	9	4	1	2
3	4	5	6	2	1	9	8	7
9	2	1	8	4	7	3	6	5

Hình 8b (Bài giải, 41-47)

2	5	8	6	9	3	7	1	4
4	7	1	2	5	8	9	3	6
6	9	3	4	7	1	5	8	2
7	1	4	5	8	2	6	9	3
9	3	6	7	1	4	2	5	8
5	8	2	9	3	6	4	7	1
1	4	7	3	6	9	8	2	5
3	6	9	8	2	5	1	4	7
8	2	5	1	4	7	3	6	9

Hình 8c (Bài giải có tính Ma Phương, 45-45)

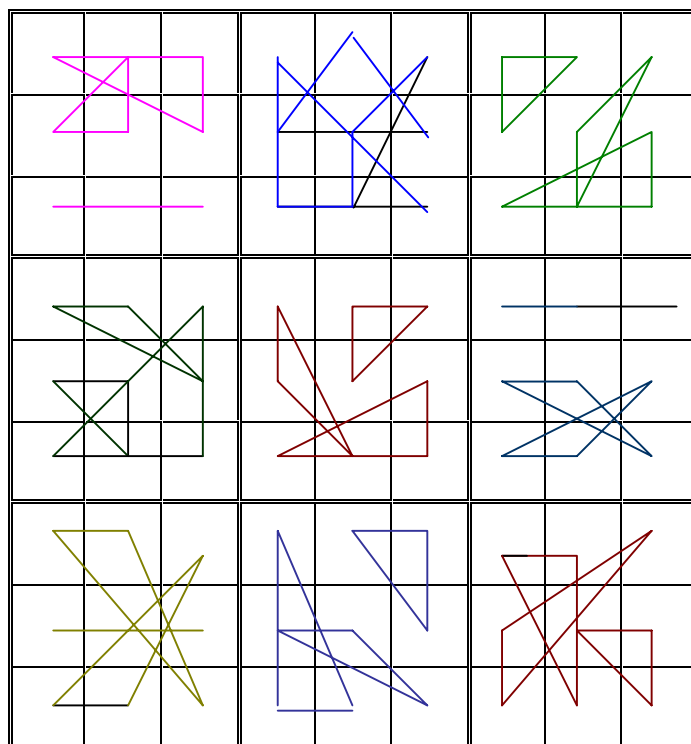
Ta có thể mô tả *Sudoku* bằng một hình vuông Latin sau, mà a, b, c, d, e, f, g, h, i là 9 thông số có thể có bất cứ giá trị hay trị số nào, như trong Hình 9:

a	f	g	d	c	h	i	e	b
b	i	e	a	f	g	c	h	d
d	c	h	b	i	e	f	g	a
i	e	b	f	g	a	d	c	h
c	h	d	i	e	b	a	f	g
f	g	a	c	h	d	b	i	e
e	b	i	h	d	c	g	a	f
h	d	c	g	a	f	e	b	i
g	a	f	e	b	i	h	d	c

Hình 9

6	9	2	1	8	7	3	4	5
5	1	7	3	6	4	8	9	2
4	8	3	9	2	5	7	1	6
8	3	1	4	5	9	6	2	7
7	2	4	8	1	6	9	5	3
9	6	5	7	3	2	4	8	1
1	5	8	6	4	3	2	7	9
2	7	6	5	9	8	1	3	4
3	4	9	2	7	1	5	6	8

Hình 10 (trị số a=6, b=5, c=8lấy từ hình 9)



Hình 10b (tập hợp có tổng số 15)

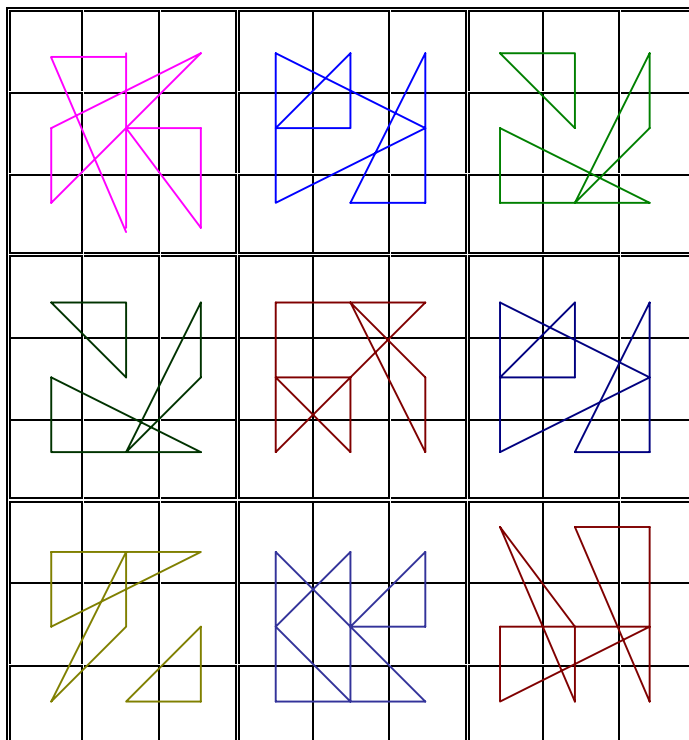
Ta có thể vẽ một *Sudoku hoàn toàn* theo hình vuông Latin sau trong Hình 11, mà A, B, C, D, E, F, G, H, I là 9 thông số có thể có bất cứ trị số nào:

A	G	D	C	I	F	H	E	B
B	H	E	A	G	D	I	F	C
C	I	F	B	H	E	G	D	A
H	E	B	G	D	A	C	I	F
I	F	C	H	E	B	A	G	D
G	D	A	I	F	C	B	H	E
E	B	H	F	C	I	D	A	G
F	C	I	D	A	G	E	B	H
D	A	G	E	B	H	F	C	I

Hình 11

5	1	8	3	9	6	7	2	4
4	7	2	5	1	8	9	6	3
3	9	6	4	7	2	1	8	5
7	2	4	1	8	5	3	9	6
9	6	3	7	2	4	5	1	8
1	8	5	9	6	3	4	7	2
2	4	7	6	3	9	8	5	1
6	3	9	8	5	1	2	4	7
8	5	1	2	4	7	6	3	9

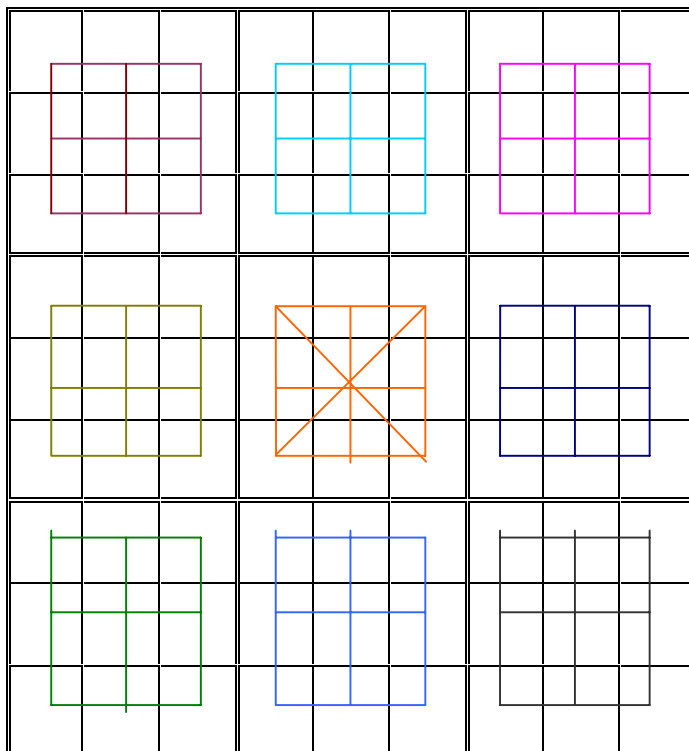
Hình 12 (trị số A=5, B=4, C=3...lấy từ hình 11)



Hình 12b (tập hợp có tổng số 15)

6	2	7	8	4	3	9	5	1
1	9	5	6	2	7	4	3	8
8	4	3	1	9	5	2	7	6
9	5	1	2	7	6	8	4	3
4	3	8	9	5	1	6	2	7
2	7	6	4	3	8	1	9	5
5	1	9	3	8	4	7	6	2
3	8	4	7	6	2	5	1	9
7	6	2	5	1	9	3	8	4

Hình 13 (Trị số khác của A=6, B=1.....lấy từ hình 11)



Hình 13b (tập hợp có tổng số 15)

Thí dụ bài đố Hình 14, càng ít ô số cho sẵn, thường cho nhiều lời giải:

<u>9</u>					<u>6</u>	<u>7</u>		
			<u>5</u>					
<u>6</u>	<u>1</u>				<u>9</u>		<u>5</u>	
		<u>8</u>				<u>3</u>	<u>7</u>	
	<u>9</u>			<u>6</u>			<u>4</u>	
	<u>3</u>	<u>1</u>				<u>8</u>		
	<u>8</u>		<u>6</u>				<u>3</u>	<u>5</u>
					<u>3</u>			
		<u>5</u>	<u>1</u>					<u>6</u>

Hình 14 (Toán đố)

<u>9</u>	5	3	4	2	<u>6</u>	<u>7</u>	1	8
8	7	2	<u>5</u>	3	1	6	9	4
<u>6</u>	<u>1</u>	4	7	8	<u>9</u>	2	<u>5</u>	3
4	6	<u>8</u>	2	1	5	<u>3</u>	<u>7</u>	9
2	<u>9</u>	7	3	<u>6</u>	8	5	<u>4</u>	1
5	<u>3</u>	<u>1</u>	9	7	4	<u>8</u>	6	2
7	<u>8</u>	9	<u>6</u>	4	2	1	3	5
1	4	6	8	5	<u>3</u>	9	2	7
3	2	<u>5</u>	<u>1</u>	9	7	4	8	<u>6</u>

Hình 14 (Bài giải 1, 41-55)

<u>9</u>	5	3	4	2	<u>6</u>	<u>7</u>	1	8
8	2	7	<u>5</u>	3	1	6	9	4
<u>6</u>	<u>1</u>	4	7	8	<u>9</u>	2	<u>5</u>	3
4	6	<u>8</u>	2	1	5	<u>3</u>	<u>7</u>	9
7	<u>9</u>	2	3	<u>6</u>	8	5	<u>4</u>	1
5	<u>3</u>	<u>1</u>	9	7	4	<u>8</u>	6	2
2	<u>8</u>	9	<u>6</u>	4	7	1	<u>3</u>	<u>5</u>
1	4	6	8	<u>5</u>	<u>3</u>	9	2	7
3	7	<u>5</u>	<u>1</u>	9	2	4	8	<u>6</u>

Hình 14 (Bài giải 2, 36-55)

<u>9</u>	5	2	4	8	<u>6</u>	<u>7</u>	1	3
8	7	3	<u>5</u>	2	1	6	9	4
<u>6</u>	<u>1</u>	4	7	3	<u>9</u>	2	<u>5</u>	8
4	6	<u>8</u>	2	1	5	<u>3</u>	<u>7</u>	9
2	<u>9</u>	7	3	<u>6</u>	8	5	<u>4</u>	1
5	<u>3</u>	<u>1</u>	9	7	4	<u>8</u>	6	2
7	<u>8</u>	9	<u>6</u>	4	2	1	<u>3</u>	<u>5</u>
1	4	6	8	<u>5</u>	<u>3</u>	9	2	7
3	2	<u>5</u>	<u>1</u>	9	7	4	8	<u>6</u>

Hình 14 (Bài giải 3, 41-50)

<u>9</u>	5	2	4	8	<u>6</u>	<u>7</u>	1	3
8	7	3	<u>5</u>	2	1	6	9	4
<u>6</u>	<u>1</u>	4	7	3	<u>9</u>	2	<u>5</u>	8
5	6	<u>8</u>	2	1	4	<u>3</u>	<u>7</u>	9
2	<u>9</u>	7	3	<u>6</u>	8	5	<u>4</u>	1
4	<u>3</u>	<u>1</u>	9	7	5	<u>8</u>	6	2
7	<u>8</u>	9	<u>6</u>	4	2	1	<u>3</u>	<u>5</u>
1	4	6	8	5	<u>3</u>	9	2	7
3	2	<u>5</u>	<u>1</u>	9	7	4	8	<u>6</u>

Hình 14 (Bài giải 4, 42-49, và v.v.)

Lời Bàn Luận

Tổng số các ô hiện hữu trong *Sudoku* 9x9 có thể lên tới con số kỷ lục 6.67×10^{21} theo Bertram Felgenhauer và Frazer Jarvis. Nếu trừ đi các phần đối xứng, Jarvis và Russell cho rằng *Sudoku* có trên 5.47 tỷ đáp số. Bài này không nói đến những cách giải dùng toán học như số học, đại số học, ma trận.. hoặc nhờ vào những thảo chương điện toán.

Bài đồ càng khó vì ít ô số cho sẵn, lại có thể cho nhiều lời giải, như thí dụ của bài đồ trong Hình 5, Hình 14.... Từ cách thành lập *Sudoku*, có $3 \times 9 = 27$ điều kiện/sự ràng buộc trong 9 khu vuông, 9 hàng, 9 cột. Nếu ta thêm sự ràng buộc vào hai đường chéo chính để cho ra *Sudoku hoàn toàn*, thì số điều kiện tăng lên là 29. Vì thế, số đáp số cho *Sudoku hoàn toàn* ít hơn số đáp số cho *Sudoku*. Sự tìm kiếm sẽ dễ dàng hơn đôi chút.

Trong *Sudoku*, ta cũng có thể nối kết những tập hợp ba con số trong các khu vuông để cho ra tổng số 15, như trường hợp một Ma Phương. Điều này được mô tả trong những Hình 10b, 12b, 13b. Đặc biệt trong Hình 13b, khu vuông trung tâm có 9 ô là một *Toàn Ma Phương* của thời Phục Hi, trong khi các khu vuông chung quanh trở thành *Bán Ma Phương*.

Ngoài ra, ta còn có *Sudoku lập phương*, giống như trò chơi Rubik cube đã thấy phổ thông từ thập niên 1980, với các chuỗi số của *Sudoku*.

Tùy theo cách sắp xếp các con số, ta có thể tạo thành nhiều mô hình đặc sắc, dựa vào Lý thuyết các tập hợp (Théorie des ensembles, Set Theory).

Nói đến các tập hợp, tác giả liên tưởng đến môn Tân Toán Học hay Mathématiques Modernes ở Pháp, Modern Mathematics ở Anh và New Math ở Mỹ. Môn học này thật ra không có gì mới lạ vì xuất hiện trên một thế kỷ, nhưng đã được đem ra áp dụng tại nhà trường vào đầu thập niên 60 của thế kỷ trước, tại các trường Trung Học Chương Trình Pháp Ngữ ở Việt Nam. Hệ phái Nicolas Bourbaki gồm nhiều nhà toán học Pháp quá đặt nặng tính trừu tượng nên quan niệm không thiết thực đã sinh ra một số áp dụng sai lầm. Nhiều điều giảng dạy ít liên quan với cuộc sống, đã làm bối rối cả học sinh lẫn phụ huynh. Có lẽ các nhà khảo cứu ưa chuộng lối suy luận sâu rộng, vì quá vội vã áp dụng những điều tốt đẹp nên quên mất khía cạnh cầu kỳ/hư ảo. Dần dà Tân Toán Học không còn là đề tài bàn cãi vì những sự quá trốn đã được bỏ đi để thay vào những điều thực dụng dễ hấp thụ hơn.

Toán đố *Sudoku* loại dễ sẽ khuyến khích sự yêu thích việc tính toán và tìm tòi. Điều này rất thích hợp cho trẻ em, vì tinh thần toán học vốn cần thiết cho thời đại thông tin/điện toán hiện nay. Đối với các bậc cao niên, thì kiếm bài giải cho một *Sudoku* là việc vận dụng thêm trí não, nhất là khi mà thú chơi mật chược trở thành khó thực hiện.

Có quá nhiều đồ chơi, sách vở, website nói về trò toán đố này, vì vậy tác giả chỉ xin ghi lại một hai tài liệu. Trên Mạng lưới toàn cầu, cũng nhiều nhóm tụ họp nhau để thi đua hay giải trí về môn *Sudoku*.

Thư Mục:

- 1) Andrews W. S. (1960): *Magic Squares and Cubes*
Dover Publications, Inc. New York, New York
- 2) Ian Stewart (1995):
Concept of Modern Mathematics
Dover Publications, Inc., New York
- 3) David C. Lay (1994):
Linear Algebra and its Applications
Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- 4) Richard A. Brualdi & Herbert J. Ryser (1992):
Combinatorial Matrix Theory
Cambridge University Press

Mạng Lưới:

1. Wikipédia, Encyclopédie libre:
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Sudoku>
2. Magic Square:
<http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>

San Diego, 14 tháng 12, 2006